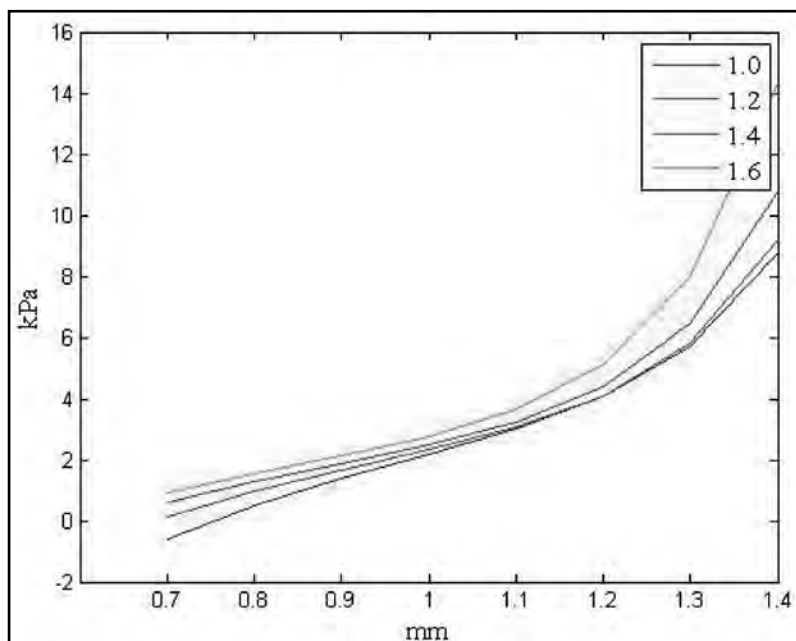


# Factores geométricos y materiales en la curva presión-deformación de un modelo de tubo arterial

MAURICIO BARRERA\*



## Resumen

Las funciones de energía de deformación que capturan características estructurales de los tejidos biológicos, permiten el estudio de su efecto en la curva presión-deformación radial en modelos del tubo arterial. En este artículo, se analiza un cilindro hueco bi-capa hiperelástico, usando la función de energía propuesta por Gasser, Ogden y Holzapfel (2006), de manera que pueda evaluarse la influencia de una serie de factores geométricos y materiales. La dispersión de las fibras de colágeno indica el papel dominante de la capa media en la rigidez estructural del modelo considerado.

**Palabras clave:** biomecánica, mecánica cardiovascular, función energía de deformación.

## Abstract

Strain energy functions that model structural features of biological tissues allow the study of their effect on the pressure-radial deformation curve in arterial tube models. Here, a two-layer hyperelastic hollow cylinder is analysed using the energy function proposed by Gasser, Ogden and Holzapfel (2006), so that the influence of a series of geome-

(\*) Docente de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Occidente, Cali, Colombia. Correo electrónico: embarrera@uao.edu.co.  
Fecha de recepción: 29/08/2013 • Fecha de aceptación: 30/09/2013.

tric and material factors of both media and adventitia can be assessed. The collagen fibre dispersion reveals the dominant role of the media layer in the structural stiffness of the model.

**Keywords:** biomechanics, cardiovascular mechanics, strain energy function.

## 1. Introducción

Los modelos recientes para la relación esfuerzo-deformación en tejidos biológicos, a través de la función energía de deformación, ya consideran detalles como la dispersión en la orientación de fibras de colágeno, por medio de un parámetro que representa desde la aleatoriedad total hasta una alineación a un solo valor de posición angular (Gassen et al., 2006).

Al implementar estos modelos en un problema de valores de frontera, es posible estudiar el efecto de dicha distribución –junto con el de otros parámetros materiales– en fenómenos de carga-deformación de interés (Holzapfel & Gassen, 2006); adicionalmente, se puede analizar la influencia de factores de tipo geométrico, como el espesor de las paredes constituyentes y el rol de un estado de estiramiento axial prescrito. Lo anterior se realizó mediante el modelado del tubo arterial como una pared cilíndrica laminada, representando las capas media y adventicia; dicho modelado resulta relevante en la comprensión del comportamiento mecánico de este órgano.

A pesar de que el método del elemento finito constituye la herramienta ubicua en la solución de problemas en materia de mecánica de sólidos hiperelásticos (Bathe, 2007), su implementación no es sencilla, dado que requiere de analistas con experiencia en la aplicación de estrategias especiales. Esto con el fin de evitar dificultades de tipo bloqueo volumétrico del elemento, toda vez que se manipulan materiales incompresibles como el tejido biológico (Belytschko, Liu & Moran, 2000). Se puede mencionar la obtención de la matriz de módulos tangentes como otro aspecto del problema que requiere personal especializado.

Luego, es pertinente disponer de simplificaciones relacionadas con la geometría del modelo y su patrón de deformación. Se trata de una idea antigua de la que, sin embargo, se valen métodos modernos de diseño, utilizando

elementos estructurales con materiales elásticos lineales (Timoshenko & Goodier, 1970). Así, extendiendo dicha idea al caso de materiales hiperelásticos, se producen formulaciones mucho más fáciles de implementar y capaces de generar predicciones útiles.

En este trabajo el tubo arterial se modela como un cilindro hueco con pared de dos capas, que sigue un patrón de deformación axisimétrico. Las ecuaciones de equilibrio estático se plantean para la configuración deformada, mientras que la función energía de deformación toma información del material en su configuración relajada, y, por medio de las herramientas que provee la mecánica de los medios continuos, produce de forma correspondiente el estado de esfuerzos de Cauchy.

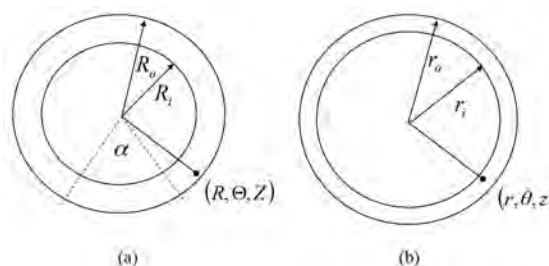
## 2. Métodos

### 2.1 Geometría y deformación

La geometría considerada es un tubo cilíndrico que pasa por tres momentos de deformación (Holzapfel & Gasser, 2000). La configuración relajada corresponde a un segmento de arteria con un ángulo de apertura  $\alpha$ , tras un corte longitudinal, que es un dato de entrada; por su parte, la configuración pre-tensionada corresponde al segmento cerrado, como tubo cilíndrico, lo que ocasiona un estado de tensión circunferencial previo a la aplicación de carga externa (Humphrey, 2002); y la configuración deformada bajo extensión axial prescrita y presión de inflado, que representa la acción de la sangre al interior de la arteria.

La Figura 1 presenta las configuraciones descritas, junto con la designación de las coordenadas de un punto material.

**Figura 1.** Configuración (a) abierta por medio de un ángulo de apertura  $\alpha$  y cerrada sin inflar; (b) cerrada y extendida-inflada



Fuente: elaboración propia.

La aplicación de tensión previa circunferencial por medio del ángulo de abertura, es solo un método para representar el estado de pre-tensión observado en muestras de arteria; existen otros modelos más precisos al respecto, orientados a aclarar la asociación de este hecho a cierto tipo de patologías que son materia de estudio.

La pre-tensión circunferencial, por cuenta del cierre de la arteria, se asume uniformemente distribuida, de modo que la relación entre coordenadas circunferenciales de las configuraciones deformada y relajada está dada por (Holzapfel & Gasser, 2000):

$$\theta = \left( \frac{2\pi}{2\pi - \alpha} \right) \Theta \quad (1)$$

Adicionalmente, se asume que la acción de cierre de la arteria no tiene efecto en el espesor de la pared de las capas ni en la longitud del segmento.

El estiramiento axial prescrito, denominado  $\lambda_z$  se utiliza con la asunción de incompresibilidad para producir una expresión que vincula las coordenadas radiales de las configuraciones cerrada sin carga y cerrada con carga –extensión y presión–, de la siguiente manera:

$$r = \sqrt{\frac{R^2 - R_i^2}{k\lambda_z} + r_i^2} \quad (2)$$

La relación entre las coordenadas axiales se da por el estiramiento axial prescrito:

$$z = \lambda_z Z \quad (3)$$

Como las componentes de la deformación se asumen independientes entre sí, entonces el tensor gradiente de deformación es diagonal:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r\partial\theta}{R\partial\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_\theta\lambda_z)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2. 2 Ecuación constitutiva

Por la incompresibilidad del material, solo se consideran las componentes distorsionales o iso-volumétricas del tensor de esfuerzos. Como la ecuación de equilibrio se escribe para la configuración deformada, y la función energía de deformación está formulada para producir un tensor segundo de Piola-Kirchhoff, es necesario disponer de una expresión que los relacione (Holzapfel, 2000):

$$\boldsymbol{\sigma}_{iso} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}_{iso} \mathbf{F}^T \quad (5)$$

donde el determinante  $J$  del tensor gradiente de deformación es igual a uno.

Gasser et al. (2006) consideran una función que es la suma de una contribución por la matriz isotropa y una por las fibras de refuerzo. La primera es una función del primer invariante del tensor derecho de Cauchy iso-volumétrico  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$  y la segunda de un invariante  $\bar{E}_i$ , que se definirá más adelante.

Dado que el material es incompresible, se tiene que  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}$ . (Bonet & Wood, 2008). Luego:

$$\Psi = \Psi_m(\bar{I}_1) + \Psi_{fi}(\bar{E}_i) \quad (6)$$

donde los subíndices “m” y “fi” indican las contribuciones de matriz y de fibras a la función de energía de deformación  $\Psi$ , respectivamente.

El invariante  $\bar{E}_i$  es el resultado de la operación  $\bar{\mathbf{C}} : \mathbf{H}_i - 1$ , en la que  $\mathbf{H}_i$  contiene información sobre la orientación preferente y el grado de dispersión alrededor de dicho valor para una familia de fibras “i” (Gasser et al., 2006):

$$\mathbf{H}_i = \kappa \mathbf{I} + (1 - 3\kappa)(\mathbf{a}_{0i} \otimes \mathbf{a}_{0i}) \quad (7)$$

Además, Gasser et al. (2006) proponen la expresión (7) a partir del concepto de tensor generalizado estructural, donde  $\kappa$  cuantifica el grado de dispersión de las fibras. El rango de valores que puede tomar, depende de la distribución estadística que se asuma para ello. Para el caso de una distribución Von-Mises,  $\kappa$  va desde cero para fibras perfectamente alineadas con la dirección  $\mathbf{a}_{0i}$  hasta 1/3 para fibras totalmente dispersas (Gasser et al., 2006).

La forma específica de la función energía de deformación se obtiene partiendo de estudios experimentales sobre muestras del material de interés (Fung, 1993). Para la contribución de las fibras se considera la siguiente expresión:

$$\Psi_{fi}(\bar{E}_i) = \frac{k_1}{2k_2} [\exp(k_2 \bar{E}_i^2) - 1] \quad (8)$$

Para la matriz isotrópica es usual considerar una función de tipo Neo-Hookeano con un solo parámetro:

$$\Psi_m(\bar{I}_1) = \frac{c}{2} (\bar{I}_1 - 3) \quad (9)$$

Con esta función de energía, el tensor  $\mathbf{S}_{iso}$  se calcula a través de (Holzapfel, 2000):

$$\mathbf{S}_{iso} = J^{-2/3} \mathbf{P}_4 : \bar{\mathbf{S}} \quad (10)$$

donde se ha introducido el tensor proyección de cuarto orden,  $\mathbf{P}_4$ , construido con los operadores delta de Kronecker, y el denominado tensor ficticio de Piola-Kirchoff,  $\bar{\mathbf{S}}$ , obtenido directamente de la función energía de deformación:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (11)$$

La derivación se efectúa invocando la regla de la cadena y utilizando las identidades para la diferenciación de invariantes de  $\bar{\mathbf{C}}$  con respecto a este mismo tensor (Holzapfel, 2000).

### 2. 3 Ecuación de equilibrio

Por cuenta de la simetría axial del modelo de tubo arterial, la única ecuación relevante es la del equilibrio en la dirección radial (Holzapfel & Gasser, 2002):

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (12)$$

donde la condición de frontera se sustenta en que el esfuerzo radial es igual a la presión de inflado,  $p_i$ , sobre la pared interna. A esto se suma la consideración de que las componentes diagonales del esfuerzo de Cauchy pueden descomponerse aditivamente en presión hidrostática y esfuerzo iso-volumétrico o distorsional, por ejemplo, en  $\sigma_{rr} = p + \sigma_{iso,rr}$ , se tiene, entonces, por integración de la Ecuación (12), que:

$$p_i = \int_{r_i}^{r_o} (\sigma_{iso,\theta\theta} - \sigma_{iso,rr}) \frac{dr}{r} \quad (13)$$

En cuanto a la implementación, la Ecuación (4) muestra que el estiramiento circunferencial  $\lambda_\theta$  se puede dejar como una función de la coordenada radial  $r$ , el radio interno y externo del tubo arterial sin deformar y el radio interno  $r_i$  del tubo

deformado. Esta característica resulta extensiva a todos los términos que se expusieron hasta llegar al integrando de la Ecuación (13); así, asumiendo un valor para  $r_i$ , la eventual integración de la Ecuación (13) produce el valor correspondiente a la presión de inflado en estado de equilibrio estático.

### 3. Resultados

Se exploró el efecto de los siguientes factores en la curva presión deformación del modelo de tubo arterial: espesor de pared, factor de dispersión de fibras  $\kappa$  ángulo de orientación preferente de las fibras  $\beta$  y parámetro  $k_2$  de rigidez exponencial, debido a la alineación de las fibras. Se llevó a cabo realizando variaciones con respecto a los valores de referencia señalados en la Tabla 1, que producen la curva presión-deformación de la Figura 2. Estas variaciones se aplicaron a las dos capas simultáneamente, tras lo cual se estudió el efecto de la presencia de dispersión de fibras, de forma separada, en la capa media y en la adventicia. Todos los análisis se llevaron a cabo para los siguientes valores de estiramiento axial prescrito: 1.0, 1.2, 1.4 y 1.6

**Tabla 1.** Parámetros de referencia utilizados en este trabajo para el modelo constitutivo propuesto por Gasser et al. (2006)

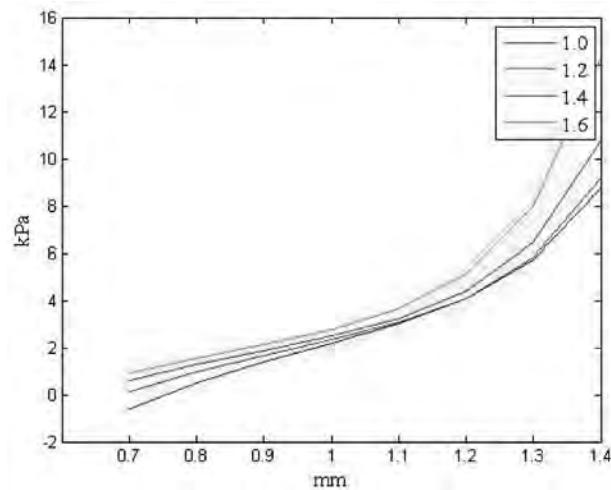
Parámetro	Capa media	Capa adventicia	Unidad
$\kappa$	0.15	0.15	No dimensional
$c$	3	0.3	kPa
$k_1$	2.36	0.56	kPa
$k_2$	0.8393	0.7112	No dimensional
Orientación preferente de fibras	29	40	Grados
Espesor	0.26	0.15	mm
Ángulo de apertura		15	Grados

**Fuente:** elaboración propia a partir del trabajo de Holzapfel & Gasser (2000).

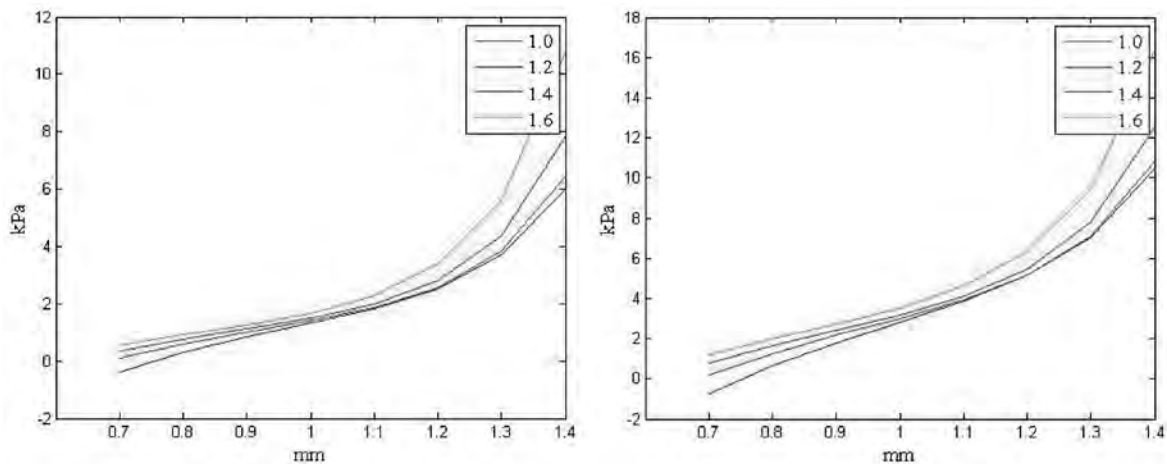
Como se observa en la Figura 2, lo más característico es el comportamiento exponencial de la curva presión de inflado-deformación radial. Igualmente, el estiramiento prescrito cumple el papel de otorgar rigidez a la estructura, lo cual es más evidente a grandes valores de presión-deformación.

#### 3. 1 Efecto del espesor de la pared

Se evaluó el efecto de una reducción del 50 % contra un aumento del 50 % en el espesor de pared, si se observan los datos relacionados en la Tabla 1. Los resultados se muestran en la Figura 3.

**Figura 2.** Curva presión-deformación según los parámetros de referencia indicados en la Tabla 1

Fuente: elaboración propia.

**Figura 3.** Curva presión-deformación con reducción (izquierda) y aumento del 50% (derecha) del espesor de las paredes media y adventicia, contrastada con los valores de la Tabla 1

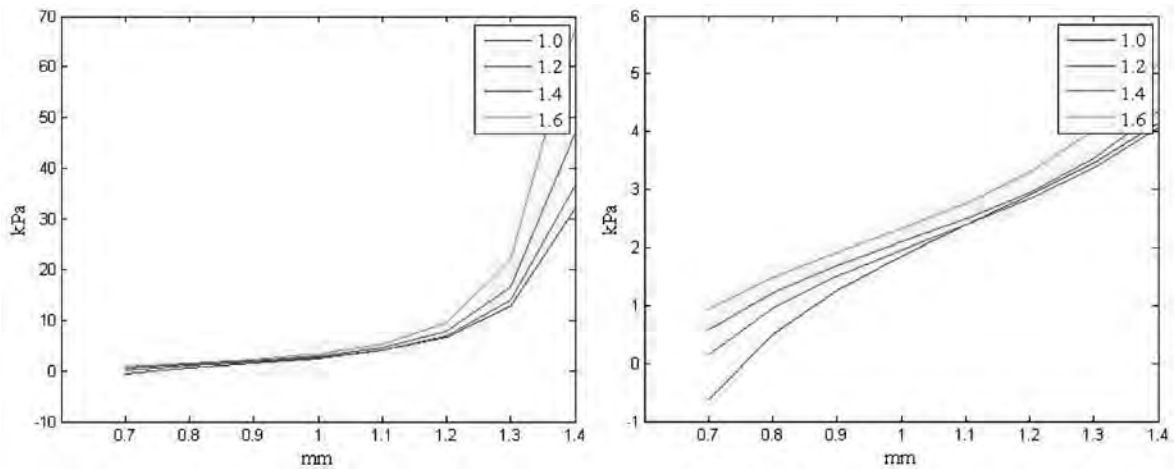
Fuente: elaboración propia.

La Figura 3 indica que un espesor de pared mayor hace significativamente más rígida a la estructura, sin afectar el rol del estiramiento axial prescrito. Además, hace menos evidente el crecimiento exponencial de la rigidez con el valor de la deformación.

### 3. 2 Efecto de la dispersión de las fibras

Se produjeron curvas presión-deformación para el caso de cero dispersión en la orientación de las fibras, u orientación única a los valores de  $\beta$  (indicados en la Tabla 1), y para dispersión casi total. Estas situaciones corresponden a valores del parámetro  $\kappa$ , iguales a cero y a 0.3, respectivamente. El máximo valor que puede tomar  $\kappa$  es de 1/3, equivalente a la dispersión total de la orientación de las fibras (Gasser et al., 2006). Las curvas referidas se muestran en la Figura 4.

**Figura 4.** Curva presión-deformación para fibras sin dispersión (izquierda) y con dispersión casi total (derecha) en la orientación de las fibras de colágeno, alrededor de las orientaciones preferentes,  $\beta$  que se indican en la Tabla 1



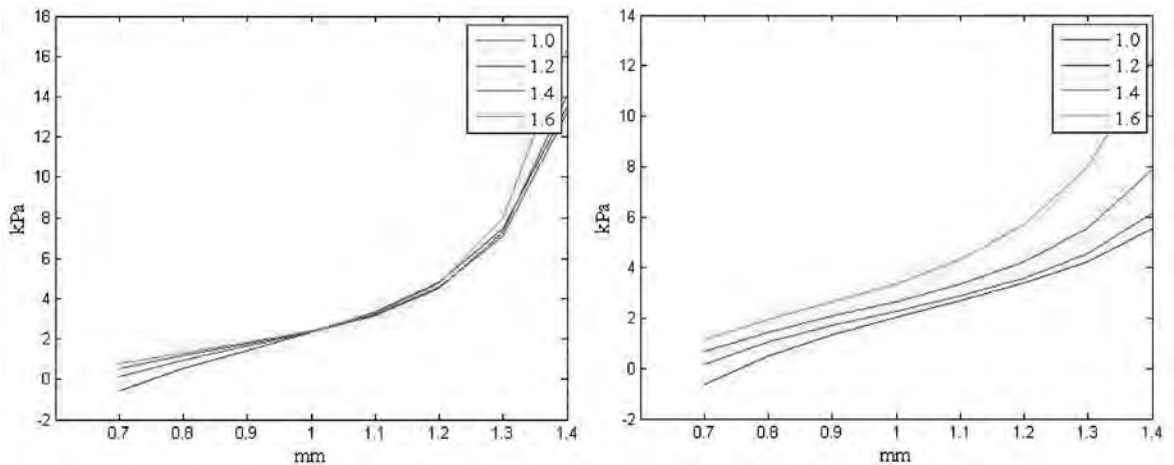
Fuente: elaboración propia.

Las curvas señalan que la dispersión disminuye en gran medida la rigidez de la estructura, a la vez que aumentan la diferencia en este mismo aspecto, en virtud del estiramiento axial prescrito. Se pierde, además, el carácter exponencial de la evolución presión-deformación.

### 3.3 Efecto de la orientación preferente de las fibras

Se elaboraron curvas correspondientes a un 50 % de disminución y de aumento, respectivamente, en el valor del ángulo de orientación preferente  $\beta$  en la orientación de las fibras de colágeno, que actúan como refuerzo estructural en ambas capas del tubo arterial. Los resultados se muestran en la Figura 5.

**Figura 5.** Curva presión-deformación para un valor de orientación preferente  $\beta$  de las fibras de refuerzo igual al 50 % (izquierda) y al 150 % (derecha), con relación a los valores mostrados en la Tabla 1



Fuente: elaboración propia.

El aumento del ángulo de orientación alinea, esencialmente, las fibras con la dirección axial. El efecto en la rigidez de la estructura no es significativo, al menos no al nivel que reportan los otros factores considerados anteriormente. Es claro que al estar las fibras más alineadas

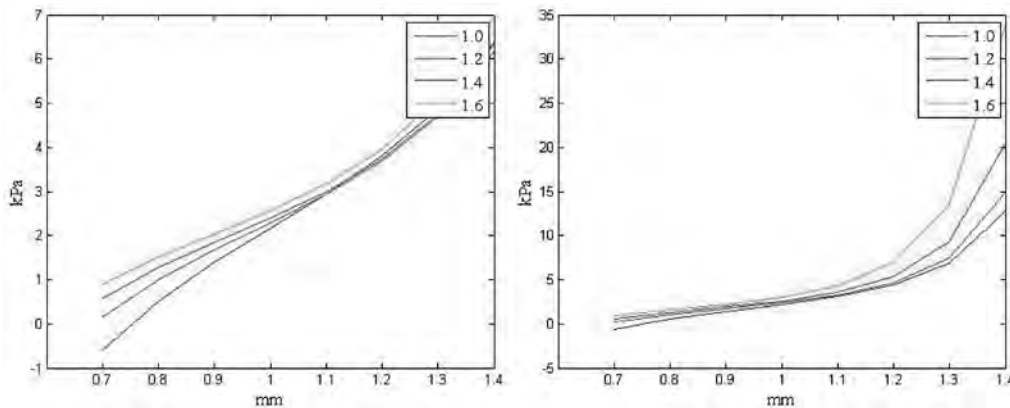
con la dirección axial de la estructura, el papel del estiramiento axial prescrito pasa a ser dominante al establecer su rigidez. Las fibras orientadas con la coordenada circunferencial acentúan el comportamiento exponencial de la curva presión-deformación.

### 3. 4 Efecto del factor de rigidez exponencial $k_2$

Nuevamente, se consideró el efecto de un aumento y de una disminución del 50 %, respectivamente, sobre la base de los valores correspondientes que se presentan en la Tabla 1. El propósito de estudiar el efecto de este factor, es el

de ver su influencia en el carácter exponencial de la curva presión-deformación y en la relevancia que tiene el estiramiento axial prescrito en los escenarios propuestos. Las curvas producidas se muestran en la Figura 6.

**Figura 6.** Curva presión-deformación para un valor del factor de rigidez exponencial  $k_2$ , reducido (izquierda) y aumentado (derecha) un 50 % con respecto a los valores mostrados en la Tabla 1



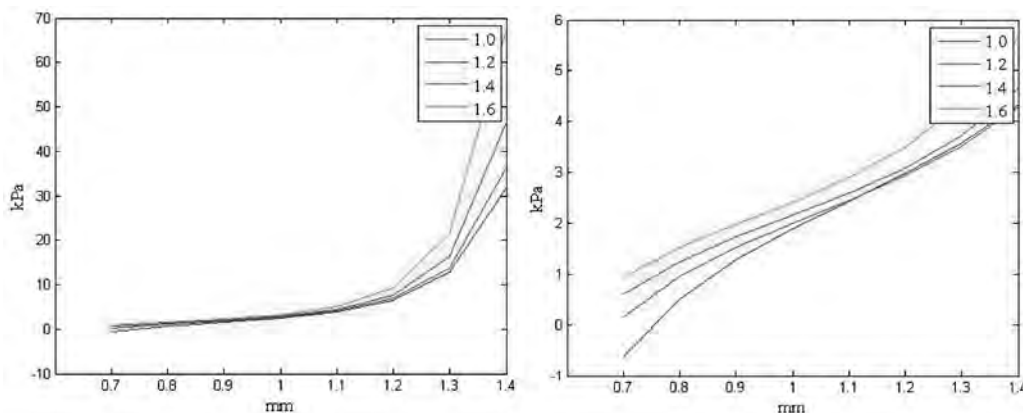
Fuente: elaboración propia.

El factor  $k_2$  participa en el aumento de la rigidez de la estructura, en un grado mayor al observado en la dispersión de las fibras. Por otra parte, una pérdida de valor de este factor provoca que la evolución de la deformación, con la presión de inflado correspondiente, deje de ser exponencial y paulatinamente se vuelva lineal, dejando, entonces, el rol de la rigidez al material de la matriz isotropa.

### 3. 5 Efecto de la dispersión de fibras según la capa media o adventicia

Este factor es el de mayor relevancia en la función energía de deformación propuesta por Gasser et al. (2006), de manera que es pertinente aclarar su influencia en la curva presión-deformación, según se presente o no en la capa media o en la adventicia. Dicha observación, así mismo, podría indicar, estructuralmente, qué capa resulta dominante en el establecimiento de su rigidez. Los resultados se muestran en la Figura 7.

**Figura 7.** Curva presión-deformación con dispersión casi total ( $k = 0.3$ ), solamente en la capa adventicia (izquierda) y en la capa media (derecha)



Fuente: elaboración propia.

Esta Figura muestra que el rol de la dispersión de las fibras en la curva presión-deformación, observado en la Figura 4, es en realidad un factor dentro de la capa media y no en la adventicia. A partir de lo anterior, puede señalarse que la capa media es dominante a la hora de determinar la rigidez de la estructura del modelo considerado.

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se formuló e implementó un problema de valores en la frontera, basado en un modelo geométrico y en la asunción de un patrón de deformación capaz de representar, en sus tendencias más generales, el comportamiento mecánico de un segmento de tubo arterial. Al utilizar la función energía de deformación propuesta por Gasser et al. (2006), se pudo estudiar el efecto que tiene la dispersión de la orientación en las fibras de refuerzo, ubicadas en la curva presión deformación. Además, mediante el modelo de dos capas que se propuso en el marco de este trabajo, se estableció que dicha dispersión, a través del parámetro  $K$ , se constituye en factor cuando se presenta en la capa media y no en la adventicia; así, parece ser la primera la que determina la rigidez estructural del conjunto.

Por otra parte, las características geométricas del modelo contribuyeron a definir al estiramiento axial prescrito como factor común en el presente estudio, que cumple el papel de conferir rigidez bajo todos los escenarios considerados en este artículo; no obstante, distintos factores pueden hacer variar la relevancia de dicho pre-estiramiento.

Finalmente, el modelo constitutivo permitió apreciar la magnitud de la influencia del factor de rigidez exponencial y de la orientación preferente de las fibras de refuerzo en la rigidez de la estructura, que también podría evaluarse según la capa en que se presenten, como se realizó con el factor de dispersión de las fibras. ●

#### Referencias

- Bathe, K. J. (2007). *Finite Element Procedures*. Cambridge, MA: Klaus-Jürgen Bathe.
- Belytschko, T., Liu, W. K. & Moran, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons.

Bonet, J. & Wood, R. D. (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics*. Cambridge University Press.

Fung, Y. C. (1993). *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer.

Gasser, T. C., Ogden, R. W. & Holzapfel, G. A. (2006). Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *Journal of the Royal Society Interface*, (3), 15-35.

Holzapfel, G. A. & Gasser, T. C. (2000). A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models. *Journal of Elasticity*, (61), 1-48.

Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. Chichester: John Wiley & Sons.

Humphrey, J. D. (2002). *Cardiovascular solid mechanics: Cells, tissues, and organs*. New York, NY: Springer.

Timoshenko, S. & Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill HE.